



Shahid Bahonar  
University of Kerman



Iranian E-Commerce Scientific  
Association

## Portfolio Optimization Model based on Median Absolute Deviation-Shannon Entropy by Goal Programming

Hila Rezaei<sup>1</sup>, Gholamhossein Golarzi<sup>2</sup>, and Omid Karimi<sup>3</sup>

1. Department of Industrial Management, Faculty of Economics, Management and Administrative Affairs, Semnan University, Semnan, Iran. **Email:** [hilarezaei@yahoo.com](mailto:hilarezaei@yahoo.com)

2. **Corresponding Author**, Department of Business Management, Faculty of Economics, Management and Administrative Affairs, Semnan University, Semnan, Iran. **Email:** [g\\_golarzi@semnan.ac.ir](mailto:g_golarzi@semnan.ac.ir)

3. Department of Statistics, Faculty of Mathematics, Statistics and Computer Sciences, Semnan University, Semnan, Iran. **Email:** [omid.karimi@semnan.ac.ir](mailto:omid.karimi@semnan.ac.ir)

### ARTICLE INFO

#### Article Type:

Research Article.

#### Article History:

**Received:** 2 November 2023

**Received in revised form:** 29 June 2024

**Accepted:** 24 July 2024

**Available online:** 11 June 2025

#### Keywords:

Shannon Entropy,  
Median Absolute Deviation Loss Function,  
Optimal Portfolio Selection.

#### JEL Classification:

G11, G30.

### A B S T R A C T

**Objective:** The main goal of portfolio optimization models is to help investors to achieve the highest rate of return at a certain level of risk. Various models and methods have been presented by researchers to achieve the optimal portfolio with different approaches. The current research is based on portfolio optimization by focusing on assets return distribution and median absolute deviation risk and Shannon entropy diversification criteria. According to this approach, at first returns distribution is identified and then appropriate model is used to select the optimal portfolio and finally performance of the median absolute deviation-Shannon entropy model based on Skew-Normal and Skew-Laplace-Normal statistical distributions are compared.

**Method:** The data used in this research are monthly returns of 181 stock exchange symbols during a period of 36 months from April 2019 to March 2022, which were randomly obtained from Morgan's table. The portfolio optimization method in this research is three-objective optimization, maximization of average return, minimization of median absolute deviation and maximization of Shannon entropy by using goal programming technique based on Skew-Normal and Skew-Laplace-Normal statistical distributions.

**Results:** The findings of this research show that median absolute deviation-Shannon entropy model based on the Skew-Laplace-Normal distribution has a higher performance ratio for choosing optimal portfolio in comparison with it's corresponding model based on the Skew-Normal distribution.

**Conclusion:** The reason for median absolute deviation-Shannon entropy model based on Skew-Laplace-Normal distribution is considered as preferred model is to pay attention to the descriptive statistics of the skewness and kurtosis of the returns distribution, by considering descriptive statistics of the symbols, the skewness of most of the stock symbols are noticeable. For this reason, simultaneously paying attention to the statistical criteria explaining the characteristics of the skewness and kurtosis of the returns distribution and Shannon entropy diversification criterion lead to it's better performance.

**Cite this article:** Rezaei, H., Golarzi, Gh., & Karimi, O. (2025). Portfolio optimization model based on median absolute deviation-Shannon entropy by goal programming. *Journal of Development and Capital*, 10(1), 161-178. [In Persian].

**DOI:** <https://doi.org/10.22103/jdc.2024.22442.1435>



**Publisher:** Shahid Bahonar University of Kerman.

© Golarzi et al.

### Introduction

The main goal of portfolio optimization models is to help investors to achieve the highest rate of return at a certain level of risk. Various models and methods have been presented by researchers to achieve the optimal portfolio with different approaches. The present research is based on portfolio optimization by focusing on assets return distribution and median absolute deviation risk and Shannon entropy diversification criteria. According to this approach, at first returns distribution is identified and then appropriate model is used to select the optimal portfolio and finally performance of the median absolute deviation-Shannon entropy model based on Skew-Normal and Skew-Laplace-Normal statistical distributions are compared. In other words, the purpose of this research is to investigate the performance of median absolute deviations risk measure along with assumption of Skew-Normal, Skew-Laplace-Normal distribution as fitting distribution of stock returns in portfolio optimization. If the distribution of returns is not normal and symmetrical, and in fact it can be said that returns have skewness, in such a situation, it would be more desirable to use the median of absolute deviations risk criterion. As it was said, since returns distribution is not normal, in order to correct distributional explaining, in addition to the parameters of location and scale, the parameters of skewness (asymmetry) and kurtosis (heavy tail) should also be taken into account. For this reason, in this research, along with the entropy diversification criterion and median absolute deviations risk criterion, stock returns distributions, Skew-Normal and Skew-Laplace-Normal distributions have been considered for considering Skewness (asymmetry) and kurtosis (heavy tail). In this research, multi-objective median absolute deviation-Shannon entropy optimization model is used in order to achieve an optimal and diversified portfolio based on entropy with assumption of Skew-Normal and Skew-Laplace-Normal distribution as default returns distribution. The objective functions in this mentioned model include maximum expected return, minimum median absolute deviation and maximum Shannon entropy of portfolio. By examining of theoretical and experimental background, it can be seen that it is possible to include parameters to measure and control skewness and kurtosis of returns distribution in structure of their distributional form, and also risk criterion is median absolute deviation in compared to mean absolute deviation risk criterion is more accurate, especially in situations where data are skewed. In other words, median absolute deviation- Shannon entropy model based on assumption Skew-Normal and Skew-Laplace-Normal statistical distributions has not been noticed by researchers. Based on this, present research, based on newest portfolio optimization model with an entropy-based approach, has resolved theoretical gap in this model and improved it. In other words, this model has taken into account Skew-Normal and Skew-Laplace-Normal distribution assumptions for returns, along with Shannon's entropy as portfolio diversification criterion and median absolute deviation as risk criterion. According to theoretical and experimental background and identified theoretical gap, the purpose of this research is to test the following hypothesis:

median absolute deviation- Shannon entropy model based on Skew-Laplace-normal distribution has a better performance in selecting optimal portfolio in compared to Skew-normal distribution of returns. The aforementioned research is carried out in three stages, these stages include fitting distribution to returns, selecting optimal portfolio with approach based on median absolute deviation-Shannon entropy and finally comparing performance of selected portfolios based on Skew-Normal and Skew-Laplace-normal statistical distributions.

### Method

The data used in this research are monthly returns of 181 stock exchange symbols during a period of 36 months from April 2019 to March 2022, which were randomly obtained from Morgan's table. The portfolio optimization method in this research is three-objective optimization, maximization of average return, minimization of median absolute deviation and maximization of Shannon entropy by using goal programming technique based on Skew-Normal and Skew-Laplace-Normal statistical distributions. In this research, median absolute

deviation- Shannon entropy model is introduced based on assumption of Skew-Normal and Skew-Laplace-Normal statistical distributions for returns, and finally, the best model based on performance ratio criteria to form an optimal portfolio is determined. Calculations related to median absolute deviation- Shannon entropy model based on Skew-Normal and Skew-Laplace-Normal statistical distributions are performed using R software.

## Results

Descriptive statistics related to monthly returns of studied sample, including mean, standard deviation, skewness and kurtosis were extracted using R software. It can be seen that some stocks have different values of skewness and kurtosis in compared to normal distribution. For example, the skewness of the "Shepna" symbol is even negative, which indicates that the yield distribution corresponding to this symbol is skewed to the left, and as another example, the skewness of distribution of "Basama" symbol is more higher than skewness of normal distribution, which both of these cases indicate that normal distribution is not a suitable fitting distribution for explaining distribution of monthly returns and it is better to use distributions that have parameters to explain skewness and kurtosis returns distribution. The statistical distributions proposed in this research are Skew-Normal and Skew-Laplace-Normal statistical distributions, because they have properties similar to normal distribution, in general, symmetric distributions such as Laplace distribution, and also They have parameters to control degree of kurtosis and skewness of returns distribution. The findings of this research show that median absolute deviation- Shannon entropy model based on the Skew-Laplace-Normal distribution has a higher performance ratio for choosing optimal portfolio in comparison with it's corresponding model based on the Skew-Normal distribution.

## Conclusions

The findings of research indicate that model based on Skew-Laplace-Normal distribution has a higher performance ratio and leads to a more optimal portfolio selection, which is due to consideration of each two measures of skewness and kurtosis in model based on Skew-Laplace-Normal distribution. The reason for median absolute deviation-Shannon entropy model based on Skew-Laplace-Normal distribution is considered as preferred model is to pay attention to descriptive statistics of the skewness and kurtosis of the returns distribution, by considering descriptive statistics of the symbols, the skewness of most of the stock symbols are noticeable. For this reason, simultaneously paying attention to the statistical criteria explaining the characteristics of the skewness and kurtosis of the returns distribution and Shannon entropy diversification criterion lead to it's better performance.

## Author Contributions

All authors contributed equally to the conceptualization of the article and writing of the original and subsequent drafts.

## Data Availability Statement

Not applicable.

## Acknowledgements

The authors thank all participants in this study.

## Ethical Considerations

The authors avoided data fabrication, falsification, plagiarism, and misconduct.

## Funding

This research did not receive any specific grant from funding agencies in the public, commercial, or not-for-profit sectors.

## Conflict of Interest

The authors declare no conflict of interest.



## مدل انتخاب پرتفولیوی بهینه میانه انحراف مطلق-آنتروپی شانون مبتنی بر برنامه‌ریزی آرمانی

هیلا رضائی<sup>۱</sup>، غلامحسین گل‌ارزی<sup>۲</sup> و امید کریمی<sup>۳</sup>

۱. گروه مدیریت صنعتی گرایش مالی، دانشکده اقتصاد، مدیریت و علوم اداری، دانشگاه سمنان، سمنان، ایران. [hilarezaei@yahoo.com](mailto:hilarezaei@yahoo.com) **رایانامه:**

۲. نویسنده مسئول، گروه مدیریت بازرگانی، دانشکده اقتصاد، مدیریت و علوم اداری، دانشگاه سمنان، سمنان، ایران. [g\\_golarzi@semnan.ac.ir](mailto:g_golarzi@semnan.ac.ir) **رایانامه:**

۳. گروه آمار دانشکده ریاضی، آمار و علوم کامپیوتر، دانشگاه سمنان، سمنان، ایران. [omid.karimi@semnan.ac.ir](mailto:omid.karimi@semnan.ac.ir) **رایانامه:**

### چکیده

### اطلاعات مقاله

**هدف:** مدل‌ها و روش‌های متعددی برای دست یافتن به پرتفولیوی بهینه با رویکردهای مختلف توسط محققان ارائه شده است. پژوهش جاری به بهینه‌سازی پرتفولیو با تمرکز بر نوع توزیع بازده دارایی‌ها و معیار ریسک میانه انحراف مطلق و معیار تنوع‌بخشی آنتروپی شانون پرداخته است و در نهایت عملکرد مدل میانه انحراف مطلق-آنتروپی شانون مبتنی بر توزیع چوله-نرمال و چوله-لاپلاس-نرمال مورد مقایسه قرار گرفته است.

**نوع مقاله:** مقاله پژوهشی.

### تاریخ‌ها:

تاریخ دریافت: ۱۴۰۲/۸/۱۱

تاریخ بازنگری: ۱۴۰۳/۴/۹

تاریخ پذیرش: ۱۴۰۳/۵/۳

تاریخ انتشار برخط: ۱۴۰۴/۳/۲۱

**روش:** داده‌های به کار رفته در این پژوهش، بازده‌های ماهانه ۱۸۱ نماد بورسی که به روش تصادفی از جدول مورگان حاصل شده‌اند طی بازه زمانی ۳۶ ماهه از فروردین ۱۳۹۸ تا اسفند ۱۴۰۰ هستند. روش بهینه‌سازی پرتفولیو در این پژوهش، بهینه‌سازی سه هدفه حداکثرسازی میانگین بازده، حداقل‌سازی میانه انحراف مطلق و حداکثرسازی آنتروپی شانون با روش برنامه‌ریزی آرمانی مبتنی بر توزیع‌های آماری چوله-نرمال و چوله-لاپلاس-نرمال است.

### واژه‌های کلیدی:

آنتروپی شانون، تابع زبان میانه انحراف مطلق، انتخاب پرتفولیوی بهینه.

**یافته‌ها:** یافته‌های پژوهش نشان‌دهنده این است که مدل میانه انحراف مطلق-آنتروپی شانون مبتنی بر توزیع چوله-لاپلاس-نرمال جهت انتخاب پرتفولیوی بهینه از عملکرد مطلوب‌تری برخوردار است.

**نتیجه‌گیری:** دلیل انتخاب مدل میانه انحراف مطلق-آنتروپی شانون مبتنی بر توزیع چوله-لاپلاس-نرمال به عنوان مدل ارجح، توجه هم‌زمان به آماره‌های توصیفی میزان چولگی و کشیدگی توزیع بازده‌ها است، میزان کشیدگی اغلب نمادهای بورسی قابل ملاحظه است. به همین دلیل توجه هم‌زمان به معیارهای آماری تبیین‌کننده ویژگی‌های چولگی و کشیدگی توزیع بازده‌ها و معیار تنوع‌بخشی آنتروپی شانون منجر به عملکرد بهتری شده است.

### طبقه‌بندی JEL:

G11, G30.

**استاد:** رضائی، هیلا؛ گل‌ارزی، غلامحسین و کریمی، امید (۱۴۰۴). مدل انتخاب پرتفولیوی بهینه میانه انحراف مطلق-آنتروپی شانون مبتنی بر برنامه‌ریزی آرمانی.

مجله توسعه و سرمایه، ۱۰(۱)، ۱۶۱-۱۷۸. <https://doi.org/10.22103/jdc.2024.22442.1435>

**ناشر:** دانشگاه شهید باهنر کرمان.

© گل‌ارزی و همکاران.



## ۱- مقدمه

از ویژگی‌های اصلی سرمایه‌گذاری در بورس سهام و اوراق بهادار ریسکی بودن و نوسان زیاد بازده آنها است. جهت کاهش چنین نوساناتی روش‌های مختلفی، از جمله متنوع ساختن سبد سرمایه‌گذاری یا تشکیل پرتفولیو به کار برده شده است. سرمایه‌گذاران می‌توانند با استفاده از دارایی‌های موجود در بازار، پرتفولیوهای متعددی تشکیل دهند. سؤالی که در اینجا مطرح است این است که از بین پرتفولیوهای متعدد، مطلوب‌ترین آنها کدام است؟ پرتفولیوی بهینه، نشان‌دهنده ترکیبی از دارایی‌های مختلف است که با سرمایه‌گذاری در آنها مطلوبیت سرمایه‌گذار با توجه به محدودیت‌های موجود حداکثر می‌شود. با توجه به تعریف، بحث انتخاب دارایی‌ها و تعیین نسبت سرمایه‌گذاری در هر کدام از آنها مساله انتخاب پرتفولیو نامیده می‌شود. انتخاب پرتفولیوی بهینه به صورت یک موضوع بین رشته‌ای در اقتصاد، مالی، آمار و ریاضی و ... مورد بررسی قرار گرفته است. **مارکوویتز<sup>۱</sup> (۱۹۵۲)** نخستین کسی بود که بحث بهینه‌سازی پرتفولیو را در قالب مدل میانگین-واریانس<sup>۲</sup> مطرح کرد. در این مدل با فرض نرمال بودن توزیع بازده اوراق بهادار، واریانس به عنوان معیار ریسک پرتفولیو در نظر گرفته شده است (لیم<sup>۳</sup> و همکاران، ۲۰۲۱). بر اساس نتایج تحقیقات صورت گرفته، توزیع بازده دارایی‌های مالی غالباً نرمال نیست و دارای چولگی است، که این باعث به چالش کشیده شدن نظریه مارکوویتز شده است. به کارگیری میانگین انحراف مطلق<sup>۴</sup> به عنوان معیار اندازه‌گیری ریسک پرتفولیو به جای واریانس تا حد زیادی توانسته به حل این مشکل کمک نماید (کونو و یامازاکی<sup>۵</sup>، ۱۹۹۱). ارداس<sup>۶</sup> (۲۰۲۰) مدل میانگین-انحراف مطلق (MAD) را برای شاخص سهام ترکیه به کار گرفته است. در مطالعه‌ای که توسط ارداس (۲۰۲۰) انجام شد مدل میانگین-واریانس مارکوویتز توسط مدل میانگین-انحراف مطلق جایگزین شد. در پژوهش وی، مدل برنامه‌ریزی خطی روی داده‌های ۳۰ سهم شاخص بورس استانبول (BIST-30) طی دوره زمانی ژانویه ۲۰۱۲ تا دسامبر ۲۰۱۴ اجرا شد. مدل مذکور مبتنی بر برنامه‌ریزی خطی به منظور ایجاد پرتفولیوی بهینه بوده است که با افزودن محدودیت حجم معاملاتی و با به کارگیری انحراف مطلق به عنوان جایگزینی مناسب برای معیار ریسک واریانس منجر به افزایش میزان بازده مورد انتظار پرتفولیو و کاهش ریسک کل پرتفولیو از طریق افزایش تنوع بخشی و کاهش ریسک غیرسیستماتیک شده است. فرایند دست‌یابی به پرتفولیوی بهینه با رویکرد میانگین-انحراف مطلق (MAD) مشابه مدل میانگین-واریانس، جهت حداکثرسازی بازده در سطح معینی از ریسک یا حداقل سازی ریسک در سطح معینی از بازده است. با این تفاوت که برخلاف مدل میانگین-واریانس که در آن برای حل مسائل بهینه‌سازی نیاز به استفاده از روش برنامه‌ریزی درجه دوم است، محاسبات متناظر با مدل میانگین-انحراف مطلق مبتنی بر به کارگیری برنامه‌ریزی خطی هست زیرا توابع هدف در مدل اخیر به صورت توابع خطی هستند که باید بیشینه یا کمینه شوند. مدل MAD به دلیل سادگی محاسباتی به خصوص در شرایطی که پرتفولیو شامل تعداد سهام زیادی است، نسبت به مدل میانگین-واریانس از کارایی بالاتری برخوردار است. علیرغم برخورداری از این مزیت، این مدل مشکلاتی را به لحاظ تنوع بخشی بهینه به دنبال دارد، زیرا در این مدل امکان اینکه سهم یا سهام خاصی وزن زیادی از پرتفولیو را به خود اختصاص دهد وجود دارد. زیرا با تخصیص وزن زیادی به سهام خاص، شانس سایر سهام برای تخصیص سرمایه کمتر خواهد بود و در نتیجه با توجه به محدودیت سرمایه منجر به کاهش تنوع بخشی خواهد شد و در این صورت ریسک غیرسیستماتیک افزایش خواهد یافت که منجر به افزایش ریسک کل پرتفولیو خواهد شد. مشکل کاهش تنوع بخشی در مدل (MAD) با استفاده از معیار آنتروپی حل شده است. بدین معنا که هر چقدر آنتروپی در یک پرتفولیو بیشتر

<sup>1</sup> Markowitz<sup>2</sup> Mean-Variance<sup>3</sup> Lim<sup>4</sup> Mean-Absolute Deviation<sup>5</sup> Konno & Yamazaki<sup>6</sup> Erdas

باشد، میزان تنوع بخشی پرتفولیو بیشتر و در نتیجه ریسک غیرسیستماتیک و به تبع آن ریسک کل پرتفولیو کاهش می یابد. **لی و ژانگ<sup>۱</sup> (۲۰۲۱)**، با در نظر گرفتن مسأله تنوع بخشی در بهینه سازی پرتفولیو مدل میانگین-واریانس-آنتروپی<sup>۲</sup> را معرفی نموده اند. در مقاله آنها به معرفی مدل بهینه سازی پرتفولیو با بازده نامشخص پرداخته شده است. به این صورت که بازده دارایی های ریسکی به عنوان متغیرهای نامشخص در نظر گرفته شده است. در پژوهش آنها، مدل میانگین-واریانس-آنتروپی برای بهینه سازی پرتفولیو با در نظر گرفتن چهار معیار یعنی بازده، ریسک، نقدینگی و میزان تنوع بخشی ارائه شده است. در نهایت، یک شبیه سازی عددی با استفاده از نرم افزار MATLAB و الگوریتم (fmincon) به منظور تأیید اثربخشی و کاربردی بودن مدل اجرا شده است. **لو<sup>۳</sup> و همکاران (۲۰۲۱)**، به مطالعه و بررسی مسأله بهینه سازی پرتفولیو با به کارگیری اصل آنتروپی پرداخته اند. در پژوهش آنها، به بحث انتخاب پرتفولیوی چند دوره ای چند هدفه بر اساس عدم قطعیت پرداخته شده است. مدل معرفی شده توسط آنها، مدل بهینه سازی چندهدفه چند دوره ای پرتفولیو مبتنی بر میانگین-نیمه آنتروپی-چولگی است. در نهایت با ارائه مثال کاربردی، اثربخشی رویکرد مدل معرفی شده توسط آنها نسبت به مدل های سنتی با به کارگیری الگوریتم هیبرید (MFA-SOS) نشان داده شده است. **لیم و همکاران (۲۰۲۱)** با به کارگیری معیار آنتروپی به عنوان شاخص تنوع بخشی در مدل میانگین-انحراف مطلق (MAD) و با استفاده از شاخص داوونز، دریافتند که مدل میانگین-انحراف مطلق-آنتروپی<sup>۴</sup> از مدل های میانگین-انحراف مطلق و مدل پرتفولیوی حاصل از وزن یکسان (دارای وزن یکسان برای همه سهام موجود) عملکرد بهتری دارد. با مرور مطالعات صورت گرفته می توان گفت که در هیچ یک از این مطالعات، به موضوع امکان لحاظ نمودن پارامترهایی جهت اندازه گیری و کنترل میزان چولگی و کشیدگی توزیع بازده ها در ساختار فرم توزیعی آنها و نیز به این نکته که معیار ریسک میانه انحراف مطلق در مقایسه با معیار ریسک میانگین انحراف مطلق به خصوص در شرایطی که داده ها چولگی دارند دقیق تر عمل می کند، توجه نشده است. به عبارت دیگر در مطالعاتی که تاکنون انجام شده است بحث بهینه سازی پرتفولیو بر اساس فرض معیار ریسک میانه انحراف مطلق در کنار فرض های توزیعی چوله-نرمال و چوله-لاپلاس-نرمال مورد بررسی قرار نگرفته است.

در این پژوهش، مدلی مبتنی بر میانه انحراف مطلق-آنتروپی شانون با فرض توزیعی چوله-نرمال و چوله-لاپلاس-نرمال بازده های ماهانه ارائه شده است، به عبارت دیگر این پژوهش با در نظر گرفتن فرض غیرنرمال بودن توزیع بازده دارایی ها شامل چوله-نرمال و چوله-لاپلاس-نرمال و لحاظ کردن آنتروپی شانون به عنوان معیار تنوع بخشی پرتفولیو و نیز استفاده از میانه انحراف مطلق به عنوان معیار ریسک به شناسایی پرتفولیوی بهینه با رویکرد برنامه ریزی آرمانی می پردازد. این مقاله در پنج بخش تهیه شده است: بخش دوم شامل مبانی نظری و پیشینه پژوهش است. بخش سوم، روش تحقیق است که به تشریح الگو و مدل میانه انحراف مطلق-آنتروپی پرداخته است. در بخش چهارم، یافته های پژوهش بیان شده است و در بخش پنجم، نتیجه گیری ارائه شده است.

## ۲- مبانی نظری

هدف از بهینه سازی پرتفولیوی دارایی ها، یافتن نسبت های سرمایه گذاری بهینه است که به سهام و دارایی های مختلف اختصاص داده می شود. بهینه سازی عبارت است از دستیابی به مطلوب ترین موازنه میان اهداف متضاد که بر اساس محدودیت های موجود در هر تصمیم گیری مشخص می شود (**تقی زاده یزدی، فلاح پور و احمدی مقدم، ۱۳۹۵**).

مدل **مارکویتز (۱۹۵۲)** مدلی مبتنی بر موازنه بین دو معیار بازده مورد انتظار و ریسک سرمایه گذاری است (**مارکویتز، ۱۹۵۲**). در مدلی که مارکویتز مطرح کرد بازده انواع دارایی ها به عنوان متغیرهای تصادفی در نظر گرفته می شوند که از توزیع

<sup>1</sup>. Li & Zhang

<sup>2</sup>. Mean-Variance-Entropy

<sup>3</sup>. Lu

<sup>4</sup>. Mean-Absolute Deviation-Entropy

نرمال پیروی می‌کنند که به سادگی توسط دو گشتاور مرتبه اول و دوم تعیین می‌شوند. نحوه محاسبه معیارهای معرفی شده در مدل مارکوویتز به این صورت است که معیار بازده مورد انتظار توسط میانگین مقادیر تاریخی بازده و معیار ریسک توسط واریانس محاسبه می‌شود. از مزایای مدل مارکوویتز که به عنوان مدل میانگین - واریانس مارکوویتز شناخته شده است سادگی محاسباتی مدل مذکور است. از زمان معرفی مدل بهینه‌سازی پرتفولیوی میانگین - واریانس توسط مارکوویتز تاکنون این مدل به عنوان مدل استاندارد جهت مدیریت پرتفولیو و قیمت‌گذاری دارایی‌ها به کار برده شده است و واریانس نیز به عنوان مهم‌ترین و کاربردی‌ترین معیار ریسک مطرح گردیده است. مدل مارکوویتز پایه و اساس نظریه مدرن پرتفولیو را فراهم کرد. با این وجود، پژوهش‌های جدید به بیان معایب مدل بهینه‌سازی میانگین - واریانس مارکوویتز و مشکلاتی که مدل مذکور در دنیای واقعی با آن مواجه است پرداخته‌اند. از معایب اصلی مطرح شده در ارتباط با مدل مارکوویتز عبارتند از:

۱. عدم کارایی مدل مذکور در ارتباط با بازده‌های غیرنرمال و نامتقارن (چوله)
۲. مشکلات محاسباتی که در ارتباط با برآورد ماتریس کواریانس و بازده‌های مورد انتظار مطرح است (مرکوریو، وو و زی، ۲۰۲۰).

همان‌طور که بیان شد، یکی از اصلی‌ترین معایب و مشکلات مطرح شده در خصوص مدل مارکوویتز، عدم کارایی مدل‌های بهینه‌سازی میانگین - واریانس (MVPO) مارکوویتز، در شرایطی است که توزیع بازده‌ها نرمال و متقارن نیست. از آنجایی که مدل مارکوویتز مبتنی بر فرض نرمال بودن توزیع بازده‌ها است و این در حالی است که در بسیاری از پژوهش‌های کاربردی فرض نرمال بودن توزیع بازده‌ها مورد تردید است، بنابراین نرمال نبودن توزیع بازده‌ها سبب می‌شود که از کارایی مدل بهینه‌سازی میانگین - واریانس کاسته شود. در شرایطی که توزیع بازده‌ها نرمال نیست، واریانس به عنوان معیار ریسک از کارایی لازم برخوردار نخواهد بود. کنت (۲۰۰۱) بر این باور است که مدل پارامتری در صورتی بیان‌کننده تمامی ویژگی‌های غیرنرمالی توزیع بازده است که علاوه بر پارامترهای مکان و پراکندگی توزیع، چولگی (عدم تقارن) و کشیدگی (دم سنگینی) آن را نیز لحاظ نماید (کنت، ۲۰۰۱). پیشنهاد کنت (۲۰۰۱) این است که برای در نظر گرفتن ویژگی‌های غیرنرمال توزیع، استفاده از معیارهای ریسک غیر از انحراف معیار برای تبیین کل تغییرات و نوسانات بازده‌ای ضروری است (کنت، ۲۰۰۱). این مشکلات باعث کنار گذاشتن مدل بهینه‌سازی میانگین - واریانس مارکوویتز شد (جاگاناثان و ما، ۲۰۰۳) و حتی مدل تخصیص اوزان یکسان به همه سهام‌ها بر مدل مذکور ترجیح داده شد (دیمیگول، گارلایی و اوپال، ۲۰۰۹).

برای رفع این مشکلات، بسیاری از پژوهش‌ها سه نوع رویکرد را مورد توجه قرار داده‌اند. در رویکرد اول به طور کلی نظریه مدرن پرتفولیو جهت بهینه‌سازی پرتفولیو کنار گذاشته شده و از الگوریتم‌های ابتکاری مانند الگوریتم دسته‌های میگو (تهرانی، فلاح و آصفی، ۱۳۹۷)، الگوریتم ژنتیک (آذر، یزدانیان و قندهاری، ۱۳۹۵) و الگوریتم ازدحام ذرات (کمالی، ۲۰۱۴) استفاده شده است. با این وجود، با توجه به این که الگوریتم‌های ابتکاری مبتنی بر تئوری ریاضی قوی نیستند و منجر به جواب خوب در مقابل بهینه می‌شوند؛ همچنان مدل‌های تعدیل شده‌ای مشابه مدل مارکوویتز ترجیح داده می‌شوند.

در رویکرد دوم، نظریه مدرن پرتفولیو تعدیل شده به کار برده می‌شود. پژوهش‌های انجام شده بر اساس رویکرد دوم، بر عدم کارایی واریانس به عنوان معیار ریسک متمرکز هستند و از راهکارهایی مانند کمینه‌سازی نوسانات دامنه پایین توزیع به عنوان معیار ریسک، جایگزینی توزیع لگاریتم نرمال به جای توزیع نرمال به عنوان توزیع بازده‌ها، بهینه‌سازی با در نظر گرفتن گشتاورهای بالاتر از واریانس مانند چولگی و کشیدگی بهره‌مند شدند (رام و فرگوسن، ۱۹۹۳). راسیا (۲۰۱۲)

نشان داد که نظریه فرامردن پرتفولیو منجر به متنوع سازی بیشتر پرتفولیو می شود. پژوهش های انجام شده بر اساس رویکرد سوم مبتنی بر جایگزینی معیارهای میانگین و واریانس توسط دیگر متغیرها و پارامترها است. در این رویکرد، معیارهای ریسک دیگری غیر از واریانس که مبتنی بر انحراف معیار بازده ها نیست.

مورد توجه قرار می گیرد. یکی از مهم ترین معیارهای ریسک معرفی شده، معیار ریسک آنتروپی است. بهینه سازی پرتفولیو مبتنی بر بهینه سازی آنتروپی، منجر به متنوع سازی بیشتر پرتفولیو می شود. مفهوم آنتروپی برای نخستین بار توسط **شانون (۱۹۴۸)** مطرح شد. آنتروپی در واقع معیاری از تنوع بخشی پرتفولیو است. **مرکوریو و همکاران (۲۰۲۰)** به کارگیری معیار آنتروپی را به عنوان معیار ریسک به منظور رفع تمام مشکلات مطرح شده در نظریه مردن پرتفولیو مؤثر دانسته اند. از این حیث است که بهینه سازی پرتفولیو مبتنی بر آنتروپی کاربرد فراوانی دارد (**دای، ۲۰۱۸؛ روتلا، ۲۰۱۷ و ژو، ۲۰۱۷**).

پژوهش حاضر جهت بهینه سازی پرتفولیو به نوعی بر اساس رویکرد سوم است و مبتنی بر به کارگیری پارامترهای جایگزین معیار ریسک توسط معیار ریسک میانه انحرافات مطلق در کنار لحاظ نمودن فرض های توزیعی مفروض چوله-نرمال و چوله-لاپلاس-نرمال به عنوان توزیع بازده های سهام است و در انتها نتایج حاصل از آنها در بهینه سازی پرتفولیو مورد مقایسه قرار گرفته است. به عبارت دیگر هدف از این پژوهش، بررسی عملکرد معیار ریسک میانه انحرافات مطلق در کنار فرض های توزیعی مفروض چوله-نرمال، چوله-لاپلاس-نرمال به عنوان توزیع بازده های سهام در بهینه سازی پرتفولیو است.

یکی از مهم ترین معیارهای ریسک شناخته شده، میانه انحرافات مطلق است که در واقع میانه قدرمطلق انحرافات از یک پارامتر مکان را اندازه می گیرد. میانه انحرافات مطلق کل نوسانات بازده ای را در نظر می گیرد. در صورتی که توزیع بازده ها نرمال و متقارن نیست و در واقع بتوان گفت که بازده ها دارای چولگی هستند در چنین شرایطی به کارگیری معیار ریسک میانه انحرافات مطلق مطلوب تر خواهد بود.

همان طور که گفته شد، از آنجایی که در صورت نرمال نبودن توزیع بازده ها، جهت تبیین درست توزیع، علاوه بر پارامترهای مکان و پراکندگی، باید پارامترهای چولگی (عدم تقارن) و کشیدگی (دم سنگینی) را نیز لحاظ کرد. به این خاطر در این پژوهش در کنار معیار تنوع بخشی آنتروپی و معیار ریسک میانه انحرافات مطلق، توزیع بازده ها، توزیع های مفروض چوله-نرمال و چوله-لاپلاس-نرمال در نظر گرفته شده اند تا به این ترتیب ویژگی های چولگی (عدم تقارن) و کشیدگی (دم سنگینی) نیز در نظر گرفته شود.

یکی از موضوعات مهم و کلیدی در اقتصاد مالی شناسایی پرتفولیوی بهینه است. برای این منظور محققان در حوزه های اقتصاد، مالی، آمار و ریاضی و هوش مصنوعی و ... مدل های مختلفی را با رویکردهای مختلف معرفی و ارائه نموده اند. در نظر گرفتن معیار مناسب ریسک یکی از اصلی ترین مراحل بهینه سازی پرتفولیو است. **نخستین بار، مارکویتز (۱۹۵۲)**، مدل میانگین-واریانس را جهت شناسایی پرتفولیوی بهینه به کار گرفت. مارکویتز در این مدل، از واریانس یا انحراف معیار بازده های تاریخی جهت سنجش ریسک اوراق بهادار استفاده نمود. مهم ترین مفروضات مدل مارکویتز، در نظر گرفتن توزیع آماری نرمال به عنوان توزیع برازشی بازده دارایی ها به عنوان متغیر تصادفی آماری بود. از آنجا که نتیجه تحقیقات صورت گرفته در بازارهای مالی نشان دهنده توزیع غیرنرمال بازده دارایی ها است لذا می توان گفت که مدل بهینه سازی کلاسیک ارائه شده توسط مارکویتز کارایی لازم جهت انتخاب پرتفولیوی بهینه سهام را ندارد (**ساموئلسون<sup>۱</sup>، ۱۹۷۰**).

<sup>1</sup> Samuelson

جهت برطرف نمودن این نقیصه محققان از معیارهایی غیر از انحراف معیار جهت سنجش ریسک استفاده نمودند. **کونو و یامازاکی (۱۹۹۱)**، از تابع ریسک انحراف مطلق به عنوان جایگزین تابع ریسک در مدل مارکویتز استفاده کردند و یک مدل بهینه‌سازی پرتفولیوی مبتنی بر میانگین - انحراف مطلق (MAD) را معرفی کردند. این مدل، مزایای مدل مارکویتز را حفظ و ایرادات عمده وارد شده به آن را برطرف می‌کند. یکی از معیارهای مناسب که جهت سنجش ریسک با توجه به میزان تنوع‌بخشی در پرتفولیو می‌تواند به کار گرفته شود، آنتروپی است (**ژانگ<sup>۱</sup> و همکاران، ۲۰۱۲**). آنتروپی به عنوان معیار تنوع‌بخشی، در کنار معیارهای مختلف ریسک، می‌تواند باعث بهبود عملکرد مدل‌های موجود گردد. آنتروپی معیار تصادفی بودن یا تنوع‌بخشی است که با وارد شدن به تابع هدف در مسأله بهینه‌سازی پرتفولیو، با افزایش تنوع‌بخشی منجر به کاهش ریسک غیرسیستماتیک شده و در نتیجه ریسک کل را کاهش می‌دهد. پژوهش‌های انجام شده نشان می‌دهند که با کارگیری آنتروپی به عنوان معیار ریسک کارایی پرتفولیو در کاهش ریسک افزایش می‌یابد (**برا و پارک، ۲۰۰۸**). **شانون<sup>۲</sup> (۱۹۴۸)**، اولین بار آنتروپی را به عنوان معیار تنوع‌بخشی در مدل میانگین - انحراف مطلق (MAD) وارد مدل نمود. **فیلیپاتوس<sup>۳</sup> (۱۹۷۲)**، با اعتقاد به اینکه آنتروپی معیاری جامع‌تر از واریانس جهت سنجش ریسک در شرایط نرمال نبودن بازده‌ها است، مدلی مبتنی بر آنتروپی جهت انتخاب پرتفولیوی بهینه ارائه نمود. در واقع، افزایش آنتروپی منجر به تشکیل پرتفولیوی متنوع‌تر و توأم با ریسک کمتر می‌شود (**فیلیپاتوس، ۱۹۷۲**). **هوانگ<sup>۴</sup> (۲۰۰۸)**، از آنتروپی به عنوان معیار مناسب ریسکی که به توزیع آماری بازده دارایی‌ها بستگی ندارد، در پرتفولیوی فازی استفاده کرده و دریافت برای توزیع‌های آماری نامتقارن (چوله) یا توزیع‌های آماری که نرمال نیستند استفاده از آنتروپی منجر به دستیابی به مرز بهینه کاراتری نسبت به مدل کلاسیک مارکویتز می‌شود. **جانا<sup>۵</sup> و همکاران (۲۰۰۹)**، از آنتروپی به عنوان معیار تنوع‌بخشی در تابع هدف مربوط به مسأله بهینه‌سازی پرتفولیو استفاده کردند. **لی و ژانگ (۲۰۲۱)**، به مطالعه و بررسی مدل میانگین - واریانس - آنتروپی اقدام نمودند به طوری که در آن میانگین به عنوان معیار اندازه‌گیری بازده مورد انتظار سرمایه‌گذار بوده و میزان ریسک با معیار واریانس اندازه‌گیری شده و میزان تنوع‌بخشی پرتفولیو با استفاده از آنتروپی اندازه‌گیری می‌شود. **لیم و همکاران (۲۰۲۱)**، از مدل انتخاب پرتفولیو مبتنی بر رویکرد میانگین - انحراف مطلق - آنتروپی برای دوره زمانی قبل و بعد از کرونا برای تعیین پرتفولیوی بهینه بهره گرفتند و نتایج اجرای مدل مبین کارایی بالاتر مدل پیشنهادی آنها بوده است. در این پژوهش، مدل بهینه‌سازی چند هدفه میانه انحراف مطلق - آنتروپی به منظور دستیابی به پرتفولیوی بهینه و کاملاً متنوع مبتنی بر آنتروپی با فرض توزیعی چوله - نرمال و چوله - لاپلاس - نرمال به عنوان توزیع مفروض بازده‌ها استفاده شده است. توابع هدف در مدل مذکور شامل حداکثر بازده مورد انتظار، حداقل میانه انحراف مطلق و حداکثر آنتروپی شانون پرتفولیو هستند.

### ۳- پیشینه تحقیق

**ساموئلسون (۱۹۷۰)**، نخستین کسی بود که نشان داد لحاظ نمودن گشتاورهای مراتب بالاتر جهت انتخاب پرتفولیوی بهینه سهام برای سرمایه‌گذاران حائز اهمیت بوده و اغلب سرمایه‌گذاران ترجیح می‌دهند بین دو پرتفولیو که دارای میانگین و واریانس یکسانی هستند، پرتفولیویی را انتخاب نمایند که از میزان گشتاور مرتبه سوم بالاتری برخوردار است. چولگی مثبت میزان بازدهی پرتفولیوی سهام منجر به کاهش ریسک نامطلوب شده که برای سرمایه‌گذاران مزیت به حساب می‌آید. **جانا و همکاران (۲۰۰۹)**، به ارائه مدلی جهت انتخاب پرتفولیوی بهینه با توجه به هزینه‌های معاملات مبادرت نمودند. مدل

<sup>1</sup> Zhang

<sup>2</sup> Shannon

<sup>3</sup> Philippatos

<sup>4</sup> Huang

<sup>5</sup> Jana

آنها علاوه بر میانگین، واریانس و هزینه‌های معاملات، معیار آنتروپی پرتفولیو را نیز به عنوان معیار میزان تنوع‌بخشی شامل شده است. در این پژوهش از روش برنامه‌ریزی فازی برای حل مدل و در نتیجه دست‌یابی به پرتفولیوی بهینه متناسب با ترجیحات سرمایه‌گذار استفاده شده است.

**کاسنباچر<sup>۱</sup> و همکاران (۲۰۱۷)**، با استفاده از بازده سهام شاخص S&P500 اقدام به مقایسه عملکرد مدل میانگین-واریانس با مدل میانگین-انحراف مطلق، نمودند. با استفاده از معیار شارپ مشخص شد که مدل میانگین-انحراف مطلق از مدل میانگین-واریانس کارتر است. آنها در این تحقیق دریافتند که مدل میانگین-انحراف مطلق در سطح معینی از ریسک منجر به دست‌یابی به میزان بالاتری از بازده نسبت به مدل میانگین-واریانس شده است.

**آکسارایلی و پالا<sup>۲</sup> (۲۰۱۸)**، در پژوهشی به ارائه مدلی جهت بهینه‌سازی پرتفولیو با عنوان مدل برنامه‌ریزی آرمانی چند جمله‌ای برای بهینه‌سازی پرتفولیو مبتنی بر آنتروپی (با به کارگیری دو معیار آنتروپی مختلف شامل آنتروپی شانون و جینی سیمپسون) و گشتاورهای مراتب بالاتر پرداختند. داده‌هایی که آنها برای اجرای مدل به کار بردند شامل بازده سهام موجود در شاخص سهام ترکیه بوده است. آنها در این پژوهش دریافتند مدل مبتنی بر معیار آنتروپی جینی-سیمپسون از مدل سنتی عملکرد بهتری دارد. همچنین، به کارگیری آنتروپی شانون منجر به تشکیل پرتفولیوی متنوع‌تری نسبت به آنتروپی جینی-سیمپسون شده است.

**لیم و همکاران (۲۰۲۱)**، مدل بهینه‌سازی پرتفولیو را با به کارگیری توأم مدل میانگین-انحراف مطلق و آنتروپی ارائه نمودند. هدف آنها در این پژوهش، تشکیل پرتفولیویی بود که منجر به حداقل ریسک مبتنی بر معیار ریسک میانگین انحراف مطلق و حداکثر آنتروپی به عنوان معیار تنوع‌بخشی شود. رهیافت به کار برده شده در پژوهش آنها، بهینه‌سازی چند هدفه با استفاده از روش بهینه‌سازی برنامه‌ریزی آرمانی بوده است. داده‌های به کار رفته در پژوهش آنها بازده سهام موجود در شاخص سهام نیویورک<sup>۳</sup> برای شرایط قبل و بعد از کرونا است. نتایج پژوهش مذکور نشان داد که به کارگیری توأم مدل میانگین-انحراف مطلق و آنتروپی نسبت به مدل میانگین-انحراف مطلق منجر به افزایش میزان بازده پرتفولیو شده و در نتیجه از عملکرد بهتری برخوردار است.

**بهزادی و بختیاری (۱۳۹۳)**، مدلی مبتنی بر میانگین-آنتروپی-چولگی برای بهینه‌سازی پرتفولیو ارائه نمودند. در پژوهش آنها با استفاده از داده‌های مربوط به بازده سهام شرکت‌های پذیرفته شده در بورس اوراق بهادار تهران مشخص شد که مدل مبتنی بر میانگین-آنتروپی-چولگی دارای عملکرد بهتری نسبت به مدل سنتی است.

**رستمی و همکاران (۱۳۹۴)**، به منظور بهینه‌سازی پرتفولیو در محیط فازی از گشتاورهای مراتب بالاتر بهره‌مند شدند. در پژوهش آنها برای محاسبه گشتاورها از تئوری اعتبار و برای محاسبه کارایی مدل‌ها از شاخص عملکرد اقتصادی استفاده شده است. در انتها با اجرای مدل مذکور روی داده‌های بازده ماهانه ۵۰ سهم برتر بورس اوراق بهادار تهران طی بازه زمانی شهریور ۱۳۸۸ تا شهریور ۱۳۹۲ (به علت عدم وجود کامل داده‌های همه شرکت‌ها در بازه زمانی مدنظر، در انتها ۳۷ شرکت انتخاب شده است) مشخص شد لحاظ نمودن گشتاورهای مراتب بالاتر در مدل باعث افزایش کارایی پرتفولیوی به دست آمده، شده است.

**راعی و همکاران (۱۳۹۶)**، مدل بهینه‌سازی چند هدفه پرتفولیو مبتنی بر میانگین-واریانس-آنتروپی و الگوریتم ازدحام ذرات را ارائه نمودند. داده‌های آماری پژوهش آنها شامل بازده سه ماهه ۹۸ شرکت از بین شرکت‌های پذیرفته شده در بورس اوراق بهادار تهران طی سال‌های ۱۳۹۳ تا ۱۳۹۵ است. آنها برای حل مسئله بهینه‌سازی از الگوریتم ازدحام ذرات استفاده نمودند.

<sup>1</sup> Kasenbacher<sup>3</sup> NYSE<sup>2</sup> Aksarayli Pala

آنها با مقایسه عملکرد مدل ارائه شده با مدل سنتی میانگین - واریانس مارکویتز دریافتند مدل ارائه شده توسط آنها (میانگین - واریانس - آنتروپی) با استفاده از الگوریتم ازدحام ذرات نسبت به مدل میانگین - واریانس مارکویتز عملکرد بهتری دارد.

**مجیبی و نجفی (۱۳۹۷)**، به بهینه‌سازی پرتفولیوی چند دوره‌ای با رویکرد برنامه‌ریزی پویا مبادرت نمودند. در پژوهش آنها، علاوه بر توجه به افق زمانی چند دوره‌ای و هزینه معاملاتی، از میانگین قدرمطلق انحراف از میانگین (میانگین انحراف مطلق) به عنوان معیار ریسک استفاده شده و محدودیت‌های نقدینگی، کاردینالیتی، آستانه و کلاس نیز در مدل لحاظ گردیده و همچنین عدم قطعیت داده‌ها نیز با استفاده از ابزار درخت سناریو مدل‌سازی شده است. در انتها با اجرای مدل مذکور روی داده‌های ۵ سهم از بورس اوراق بهادار تهران طی سال‌های ۱۳۹۰ تا ۱۳۹۴ نشان داده شده است که در بهینه‌سازی مدل ارائه شده در پژوهش آنها، تأثیر عواملی نظیر حدود تعیین شده برای متغیرهای تصمیم و نیز تعداد دارایی‌های موجود در پرتفولیو، مورد بررسی قرار گرفته و نتایج حاصل بیانگر آن است که مدل ارائه شده دارای عملکرد مطلوبی بوده و نتایج حاصل از آن با تئوری موضوع کاملاً مطابقت دارد.

**نبی‌زاده و بهزادی (۱۳۹۷)**، با در نظر گرفتن فرض غیرنرمال بودن توزیع بازده دارایی‌ها از طریق لحاظ نمودن گشتاورهای مراتب بالاتر در مدل و همچنین در نظر گرفتن معیار آنتروپی به عنوان معیار تنوع‌بخشی به ارائه مدل بهینه‌سازی پرتفولیو مبادرت نمودند. آنها برای حل مدل میانگین - واریانس - چولگی - کشیدگی - آنتروپی از روش برنامه‌ریزی آرمانی چندجمله‌ای استفاده نمودند. همچنین از معیارهای شانون و جینی - سیمپسون برای اندازه‌گیری آنتروپی و روش برنامه‌ریزی آرمانی چندجمله‌ای برای حل مسئله بهینه‌سازی استفاده نمودند. اجرای مدل با استفاده از داده‌های مربوط به بازده ماهانه هشت صنعت منتخب در بورس اوراق بهادار تهران طی بازه زمانی اسفند ۱۳۸۷ تا ۱۳۹۶ مشخص نمود که مدل ارائه شده توسط آنها از کارایی بالاتری نسبت به سایر مدل‌های مفروض برخوردار است.

**دیده‌خانی و همکاران (۱۳۹۸)**، در پژوهشی، مدل میانگین - انحراف مطلق (MAD) را با فرض این که بازده سهام یک متغیر تصادفی فازی است و نیز لحاظ نمودن نگرش سرمایه‌گذاران به ریسک در قالب سرمایه‌گذاران ریسک‌گریز و ریسک‌پذیر جهت انتخاب پرتفولیوی بهینه معرفی نمودند. آنها در این پژوهش، با استفاده از بازده روزانه ۱۰ سهم برتر بورس اوراق بهادار تهران طی قلمرو زمانی ۹۱ تا ۹۶ دریافتند به کارگیری الگوریتم ژنتیک در اجرای مدل ارائه شده توسط آنها باعث افزایش کارایی آن می‌شود.

**محمدی باغملانی و همکاران (۱۴۰۰)**، به ارائه مدل بهینه‌سازی پرتفولیوی مارکویتز توأم با معیار آنتروپی تجمعی و حل مدل با به کارگیری الگوریتم فراابتکاری حرکت تجمعی ذرات (PSO) جهت انتخاب پرتفولیوی بهینه سهام شرکت‌های پتروشیمی بازار بورس تهران طی بازه زمانی ۱۳۹۲/۷/۱ تا ۱۳۹۸/۶/۳۱ پرداختند. آنها به این نتیجه دست یافتند که مدل ارائه شده توسط آنها به منظور تشکیل پرتفولیوی بهینه نسبت به مدل مارکویتز کاراتر است.

**خندان (۱۴۰۲)**، به مقایسه عملکرد مدل‌های بهینه‌سازی میانگین و میانه پرداخته است. در پژوهش وی مدل‌های متنوعی مبتنی بر بیشینه‌سازی میانه یا میانگین در کنار شاخص‌های مختلف ریسک ارائه و با داده‌های واقعی بیست شرکت بورسی ایران از ابتدای سال ۲۰۱۶ تا انتهای سال ۲۰۱۹ مورد آزمون و مقایسه قرار گرفته‌اند. مهم‌ترین نتیجه به دست آمده از پژوهش وی عملکرد بهتر میانه از نظر بازده است و مدل بهینه‌سازی میانه از نظر متنوع‌سازی نیز عملکرد بسیار خوبی دارد. علاوه بر این، با به کارگیری شاخص‌های مختلف ریسک عملکرد مدل را از منظر کنترل ریسک و متنوع‌سازی مورد

مقایسه قرار داده است. نتایج به دست آمده حاکی از این است که دو شاخص ریسک متوسط ارزش در معرض ریسک (CVAR) و میانگین انحرافات مطلق (MAD) از لحاظ کنترل ریسک و نیز متنوع سازی عملکرد بسیار بهتری داشته اند.

**اسکندری سبزی و حاجی آقاجانی (۱۴۰۲)**، به مطالعه و بررسی تأثیر همه گیری کووید ۱۹ بر بازار سهام کشورهای منتخب عضو اوپک پرداخته اند. برای این منظور از اطلاعات و داده های مجموعه منتخب کشورهای عضو اوپک طی دوره زمانی ۲۰۱۷:۰۱ تا ۲۰۲۲:۰۸ و نیز از مدل داده های تابلویی و روش حرکت تعمیم یافته (GMM) بهره مند شده اند. نتایج پژوهش آنها نشان دهنده تأثیرپذیری منفی بازار سهام کشورهای منتخب از همه گیری بیماری کرونا است که منجر به کاهش شاخص بازار سهام در کشورهای منتخب عضو اوپک شده است.

### ۳-۱- نوآوری پژوهش

با بررسی پیشینه نظری و تجربی، مشاهده می شود که به موضوع امکان لحاظ نمودن پارامترهایی جهت اندازه گیری و کنترل میزان چولگی و کشیدگی توزیع بازده ها در ساختار فرم توزیعی آنها و نیز به این نکته که معیار ریسک میانه انحراف مطلق در مقایسه با معیار ریسک میانگین انحراف مطلق به خصوص در شرایطی که داده ها چولگی دارند دقیق تر عمل می کند، توجه نشده است. به عبارت دیگر، مدل میانه انحراف مطلق- آنتروپی شانون مبتنی بر فرض توزیع های آماری چوله- نرمال و چوله- لاپلاس- نرمال مورد توجه محققان واقع نشده است. بر همین اساس پژوهش حاضر با مبنا قرار دادن مدل **لیم و همکاران (۲۰۲۱)** به عنوان جدیدترین مدل بهینه یابی پرتفولیو با رویکرد مبتنی بر آنتروپی اقدام به برطرف نمودن خلأ تئوریک موجود در این مدل و بهبود آن نموده است. به عبارت دیگر این مدل با لحاظ نمودن فرض توزیعی چوله- نرمال و چوله- لاپلاس- نرمال برای بازده ها در کنار آنتروپی شانون به عنوان معیار تنوع بخشی پرتفولیو و میانه انحراف مطلق به عنوان معیار ریسک به بهینه سازی پرتفولیو مبادرت کرده است. با توجه به پیشینه نظری و تجربی بیان شده و خلأ تئوریک شناسایی شده، هدف از انجام این پژوهش آزمون فرضیه زیر است:

مدل میانه انحراف مطلق- آنتروپی شانون مبتنی بر توزیع چوله- لاپلاس- نرمال در مقایسه با توزیع چوله- نرمال بازده ها از عملکرد بهتری در انتخاب پرتفولیوی بهینه برخوردار است.

### ۳-۲- الگو و روش تحقیق

**نوع تحقیق:** این پژوهش از لحاظ هدف، کاربردی است چرا که فعالان بازار سرمایه و سرمایه گذاران و همه کسانی که به نحوی با بازار سرمایه سروکار دارند می توانند از نتایج آن جهت تخصیص بهینه دارایی ها بهره مند شوند. از نظر نوع مطالعه به لحاظ زمان، گذشته نگر است و از حیث جمع آوری نوع داده ها به دلیل عدم مداخله و دست کاری در داده ها، غیرآزمایشی و به لحاظ بهره بردن از تجزیه و تحلیل های آماری در ارتباط با توصیف داده ها و اجرای مدل برای دستیابی به نتایج، کمی است. همچنین از منظر ماهیت و روش اجرای تحقیق، توصیفی است.

**داده ها و روش جمع آوری آنها:** داده های مورد استفاده در این تحقیق را قیمت پایان ماه سهام و مصوبات مجامع شرکت ها تشکیل می دهند که از آرشیوهای آماری سازمان بورس و اوراق بهادار تهران استخراج شده اند.

**جامعه آماری پژوهش و نمونه:** جامعه آماری کلیه شرکت های پذیرفته شده در بورس اوراق بهادار تهران که واجد شرایط زیر باشند:

۱. جزء شرکت های سرمایه گذاری نباشند.

۲. وقفه ای بیش از ۶ ماه متوالی در معاملات آنها وجود نداشته باشد.

قلمرو زمانی این پژوهش یک بازه زمانی ۳۶ ماهه از فروردین ۱۳۹۸ تا اسفند ۱۴۰۰ است.

حجم نمونه و روش انتخاب آن: پس از اعمال فیلترهای دو گانه تعداد ۳۳۸ شرکت به عنوان جامعه آماری باقی ماندند که با جدول مورگان متناظر با فرمول کوکران<sup>۱</sup> حدود ۱۸۱ نماد بورسی پس از تخصیص کد به نمادها، به روش نمونه‌گیری تصادفی ساده و با استفاده از دستور sample در نرم افزار R، به عنوان نمونه آماری منتخب پژوهش تعیین شدند. (جدول مورگان<sup>۲</sup> روشی کاربردی برای محاسبه حجم نمونه زمانی است که حجم جامعه مشخص باشد. جدولی که به نام جدول مورگان معروف است یکی از پرکاربردترین روش‌ها برای محاسبه حجم نمونه آماری است. جدول کریسی-مورگان در واقع همان کاربرد فرمول کوکران است). با توجه به حجم جامعه که ۳۳۸ نماد است، نزدیک‌ترین عدد برای تعیین حجم نمونه بر اساس حجم جامعه با استفاده از جدول مورگان ۱۸۱ نماد است.

متغیرها و نحوه محاسبه آنها: متغیر مورد استفاده در این پژوهش، بازده سهام است که طبق رابطه زیر محاسبه می‌شود (راعی و پویان‌فر، ۱۳۹۶).

$$R_t = \frac{(p_t - p_{t-1})}{p_{t-1}} \quad (1)$$

که در آن  $R_t$  نماد بازده،  $p_t$  نماد قیمت تعدیل شده سهام (که در آن مصوبات مجامع شرکت‌ها لحاظ شده است) در زمان  $t$  و  $p_{t-1}$  نماد قیمت تعدیل شده سهام در زمان  $t - 1$  هستند.

مدل انجام پژوهش: پژوهش مذکور طی سه مرحله صورت می‌گیرد، این مراحل شامل برازش توزیع بازده‌ها، انتخاب پرتفولیوی بهینه با رویکرد مبتنی بر میانه انحراف مطلق - آنتروپی شانون و در نهایت مقایسه عملکرد پرتفولیوهای انتخابی مبتنی بر توزیع‌های آماری چوله - نرمال و چوله - لاپلاس - نرمال.

مرحله اول: برازش توزیع بازده‌ها: اکثر تحلیل‌های آماری متناظر با مباحث بهینه‌سازی مالی بر اساس فرض نرمال بودن توزیع بازده‌ها انجام می‌گیرد. در حالی که در بسیاری از موارد، توزیع بازده‌ها نامتقارن بوده و در نتیجه تحلیل این مجموعه از بازده‌ها با استفاده از توزیع نرمال، ممکن است خیلی مناسب نباشد. در چنین مواقعی معمولاً سعی می‌شود ابتدا با استفاده از تبدیلی مناسب، توزیع بازده‌ها را تا حد امکان به توزیع نرمال نزدیک کرده و سپس به تحلیل آنها پرداخت. اما این روش خود با دشواری‌هایی از جمله چگونگی انتخاب تبدیل مناسب و اریبی برآورد گر‌ها مواجه است. بنابراین در چنین مواردی، توزیع چوله - نرمال که توزیعی نامتقارن است می‌تواند نقش اساسی در تحلیل این داده‌ها ایفا نماید. دلایل استفاده از توزیع چوله - نرمال، در برداشتن توزیع نرمال به عنوان حالت خاص و همچنین دارا بودن پارامترهایی برای کنترل چولگی و کشیدگی ذکر شده است. آزالینی<sup>۳</sup> (۱۹۸۵)، نشان داد مقدار ضریب چولگی و ضریب کشیدگی برای این توزیع (توزیع چوله - نرمال) محدود است و این مسئله می‌تواند به عنوان نقطه ضعف برای این توزیع تلقی شود. زیرا برای داده‌هایی که دارای کشیدگی شدیدی باشند قابل کاربرد نیست. برای رفع مشکل مذکور توزیع چوله - لاپلاس - نرمال (گوپتا و همکاران، ۲۰۰۳) معرفی می‌شود که دارای ضریب کشیدگی با دامنه وسیع‌تری نسبت به توزیع چوله - نرمال آزالینی است و از طرفی توزیع لاپلاس<sup>۴</sup> را به عنوان حالت خاص در بردارد که توزیع مذکور از کشیدگی بیشتری در مقایسه با توزیع نرمال برخوردار است. ویژگی مطلوب دیگر توزیع‌های آماری چوله - نرمال و چوله - لاپلاس - نرمال، تک مدی بودن آنها است.

توزیع چوله - نرمال: انتخاب توزیع برازشی<sup>۵</sup> مناسب یکی از مفاهیم اساسی در تحلیل‌های آماری<sup>۶</sup> است. در مواقعی که

<sup>1</sup> Cochran

<sup>2</sup> Krejcie-Morgan Table

<sup>3</sup> Azzalini

<sup>4</sup> Laplace Distribution

<sup>5</sup> Fitting Distribution

<sup>6</sup> Statistical Analysis

داده‌ها نامتقارن (چوله) باشند، آزالینی توزیع چوله- نرمال استاندارد را با تابع چگالی احتمال (آزالینی، ۱۹۸۵):

$$f(z; \lambda) = 2\phi(z)\Phi(\lambda z), \quad z \in \mathbb{R}, \quad \mathbb{R}\lambda \in \quad (2)$$

برای تحلیل داده‌ها معرفی نمود که در آن  $\mathbb{R}\lambda \in$  نماد پارامتری جهت کنترل چولگی است. در این صورت گفته می‌شود که  $Z \sim SN(\lambda)$ ، به عبارت دیگر می‌توان گفت که متغیر تصادفی  $Z$  دارای توزیع چوله-نرمال استاندارد است. اگر پارامتر چولگی برابر با صفر باشد در حالت خاص توزیع چوله-نرمال استاندارد به توزیع نرمال استاندارد تبدیل می‌شود به صورت زیر:

$$f(z; \lambda) = \phi(z), \quad \lambda = 0 \quad (3)$$

$$\phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2}, \quad z \in \mathbb{R} \quad (4)$$

اگر  $Z \sim SN(\lambda)$  در این صورت امید ریاضی آن به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$E(Z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}}; \quad z \in \mathbb{R}, \mathbb{R}\lambda \in \quad (5)$$

آزالینی (۱۹۸۵)، نشان داد چولگی این توزیع بین (۰/۹۹۵ و -۰/۹۹۵) و کشیدگی آن بین (۰/۸۶۹ و -۰/۸۶۹) است و این محدودیت می‌تواند به عنوان نقطه ضعف این توزیع تلقی شود. زیرا برای مجموعه‌ای از داده‌ها که دارای چولگی یا کشیدگی شدیدی باشند قابل کاربرد نیست. در حالت کلی گفته می‌شود متغیر تصادفی  $Z$  دارای توزیع چوله نرمال است اگر تابع چگالی احتمال آن به صورت زیر باشد:

$$f(z; \lambda) = 2\phi\left(\frac{z-\mu}{\sigma}\right)\Phi\left(\lambda\left(\frac{z-\mu}{\sigma}\right)\right); \quad z \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R}, \sigma \geq 0, \mathbb{R}\lambda \in \quad (6)$$

که در آن  $\mu$  نماد پارامتر مکان<sup>۱</sup> و  $\sigma$  نماد پارامتر مقیاس<sup>۲</sup> و  $\lambda$  نماد پارامتر چولگی و به صورت  $Z \sim SN(\mu, \sigma, \lambda)$  نشان داده می‌شود.

اگر  $Z \sim SN(\mu, \sigma, \lambda)$  باشد در این صورت امید ریاضی آن به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$E(Z) = \mu + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sigma \frac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}}; \quad z \in \mathbb{R}; \mu \in \mathbb{R}; \sigma \geq 0, \mathbb{R}\lambda \in \quad (7)$$

توزیع چوله-لاپلاس-نرمال: تابع چگالی احتمال توزیع چوله-لاپلاس-نرمال به صورت زیر است (گوپتا و همکاران، ۲۰۰۳):

$$f(z; \lambda) = 2\psi(z)\Phi(\lambda z), \quad z \in \mathbb{R}, \mathbb{R}\lambda \in \quad (8)$$

$$f(z; \lambda) = \psi(z), \quad \lambda = 0 \quad (9)$$

$$\psi(z) = \frac{1}{2} e^{-|z|}, \quad z \in \mathbb{R} \quad (10)$$

که در آن  $\psi(z)$  بیانگر تابع چگالی احتمال توزیع لاپلاس و  $\Phi$  بیانگر تابع توزیع تجمعی نرمال استاندارد است. در این صورت گفته می‌شود که  $Z \sim SLN(\lambda)$ ، به عبارت دیگر می‌توان گفت که متغیر تصادفی  $Z$  دارای توزیع چوله-لاپلاس-نرمال استاندارد است. اگر  $Z \sim SLN(\lambda)$  باشد در این صورت امید ریاضی آن به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$E(Z) = \frac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}}; \quad z \in \mathbb{R}, \mathbb{R}\lambda \in \quad (11)$$

و در حالت کلی گفته می‌شود متغیر تصادفی  $Z$  دارای توزیع چوله-لاپلاس-نرمال است اگر تابع چگالی احتمال آن به صورت زیر باشد:

$$f(z; \lambda) = 2\psi\left(\frac{z-\mu}{\sigma}\right)\Phi\left(\lambda\left(\frac{z-\mu}{\sigma}\right)\right); \quad z \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R}, \sigma \geq 0, \mathbb{R}\lambda \in \quad (12)$$

<sup>1</sup> Location Parameter

<sup>2</sup> Scale Parameter

که در آن  $\mu$  نماد پارامتر مکان و  $\sigma$  نماد پارامتر مقیاس و  $\lambda$  نماد پارامتر چولگی است و به صورت  $Z \sim SLN(\mu, \sigma, \lambda)$  نشان داده می‌شود. اگر  $Z \sim SLN(\mu, \sigma, \lambda)$  باشد در این صورت امید ریاضی آن به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$E(Z) = \mu + \sigma \frac{\lambda}{\sqrt{1 + \lambda^2}}; \quad z \in \mathbb{R}; \mu \in \mathbb{R}; \sigma \geq 0, \lambda \in \mathbb{R} \quad (13)$$

مرحله دوم) انتخاب پرتفولیوی بهینه با رویکرد مبتنی بر میانه انحراف مطلق- آنتروپی شانون: جهت انتخاب پرتفولیوی بهینه با رویکرد مبتنی بر میانه انحراف مطلق- آنتروپی شانون از روش زیر تبعیت می‌شود. قبل از معرفی روش مذکور لازم است که ابتدا متغیرهای مورد استفاده در آن معرفی شوند. جدول ۱ متغیرهای مورد استفاده در مدل و نمادهای مربوط به آنها را نشان می‌دهد.

جدول ۱. متغیرهای مورد استفاده در مدل و نمادهای مربوطه

| نمادها | توصیف                                           |
|--------|-------------------------------------------------|
| $R_j$  | بازده دارای $j$ ام                              |
| $x_j$  | وزن دارای $j$ ام                                |
| $\rho$ | حداقل بازده مورد انتظار سرمایه‌گذار             |
| $R(x)$ | میانگین بازده پرتفولیو                          |
| $w(x)$ | میانه انحراف مطلق پرتفولیو                      |
| $H(x)$ | آنتروپی پرتفولیو                                |
| $R^*$  | مقدار بهینه میانگین بازده پرتفولیو              |
| $w^*$  | مقدار بهینه میانه انحراف مطلق پرتفولیو          |
| $d_1$  | تفاضل میانگین بازده پرتفولیو از مقدار بهینه     |
| $d_2$  | تفاضل میانه انحراف مطلق پرتفولیو از مقدار بهینه |
| $d_3$  | تفاضل آنتروپی پرتفولیو از مقدار بهینه           |

تابع ریسک میانه انحراف مطلق به عنوان جایگزینی مناسب برای معیار ریسک انحراف معیار معرفی شده توسط مارکوویتز (۱۹۵۲) و میانگین انحراف مطلق معرفی شده توسط کونو و یامازاکی (۱۹۹۱) به خصوص در شرایطی که توزیع بازده‌ها نرمال و متقارن نیست، هست که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$W(x) = \text{Median} \left| \sum_{j=1}^n R_j x_j - E \left( \sum_{j=1}^n R_j x_j \right) \right| \quad (14)$$

پرتفولیوی بهینه مبتنی بر مدل میانه انحراف مطلق، پرتفولیویی است که منجر به حداقل سازی  $W(x)$  شود.

مدل میانه انحراف مطلق معادل جهت انتخاب پرتفولیوی بهینه عبارت است از:

$$\min_x W(x) \quad (15)$$

که در آن:

$$\sum_{j=1}^n x_j = 1 \quad (16)$$

$$x_j \geq 0, j = 1, \dots, n \quad (17)$$

$$\sum_{j=1}^n E(R_j) x_j \geq \rho \quad (18)$$

متغیر  $R_j$  و  $x_j$  به ترتیب نماد بازده سهم  $j$  و وزن سهم  $j$  در پرتفولیو،  $\rho$  نماد بازده هدف سرمایه‌گذار است. معیار آنتروپی شانون در مدل  $H(x)$  به عنوان معیاری برای میزان تنوع‌بخشی، به صورت تابعی از وزن سهام موجود در پرتفولیو یعنی  $x_1, \dots, x_n$  است که حداکثر مقدار آن  $\ln n$  است، به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$H(x) = - \sum_{j=1}^n x_j \ln x_j \quad (19)$$

که:

$$x_j = \frac{1}{n}, \quad j = 1, \dots, n$$

پرتفولیوی که شامل سهام با وزن یکسان  $\frac{1}{n}$  است پرتفولیوی معیار<sup>۱</sup> یا پرتفولیوی با وزن یکسان سهام نامیده می شود. علاوه بر این تابع آنتروپی مشکل وزن یا نسبت سرمایه گذاری کرانی سهم خاصی در پرتفولیو را که مسئله نادیده گرفته شدن تنوع بخشی پرتفولیو را موجب می شود، رفع می کند. میزان بالای آنتروپی پرتفولیو در واقع مبین میزان بالای تنوع بخشی پرتفولیو است. افزایش تنوع بخشی موجب کاهش ریسک غیرسیستماتیک و در نتیجه کاهش ریسک کل پرتفولیو می شود. مدل بهینه سازی مذکور به صورت زیر فرمول بندی می شود:

$$\max R(x) = \sum_{j=1}^n E[R_j]x_j \quad (20)$$

$$\min w(x) \quad (21)$$

$$\max H(x), \sum_{j=1}^n x_j = 1, x_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, n \quad (22)$$

با فرض برقراری معادله های (۱۶) و (۱۷)، مقدار بهینه میانگین بازده پرتفولیو  $R^*$  عبارت است از:

$$\max R(x) \quad (23)$$

و نیز با فرض برقراری معادله های (۱۶) و (۱۷)، مقدار بهینه میانه انحراف مطلق پرتفولیو  $W^*$  نیز برابر است با:

$$\min w(x) \quad (24)$$

بهینه سازی پرتفولیو<sup>۲</sup> مبتنی بر رهیافت میانه انحراف مطلق-آنتروپی شانون منجر به مسئله بهینه سازی سه هدفه حداکثر سازی میانگین بازده، حداقل سازی میانه انحراف مطلق و حداکثر سازی آنتروپی شانون می شود. فرض کنید  $R^*$  و  $W^*$  به ترتیب نماد متناظر حداکثر میانگین بازده و حداقل میانه انحراف مطلق برای توابع هدف متناظرشان هستند. در این صورت یافتن وزن سهام موجود در پرتفولیوی بهینه مبتنی بر رهیافت میانه انحراف مطلق-آنتروپی شانون با به کارگیری روش بهینه سازی برنامه ریزی آرمانی<sup>۳</sup> (تای و لئونارد<sup>۴</sup>، ۱۹۸۸) به صورت زیر امکان پذیر است:

$$\min_x Z = \left| \frac{d_1}{R^*} \right| + \left| \frac{d_2}{W^*} \right| + \left| \frac{d_3}{\ln n} \right| \quad (25)$$

که در آن

$$R(x) + d_1 = R^* \quad (26)$$

$$W(x) - d_2 = W^* \quad (27)$$

$$H(x) + d_3 = \ln n \quad (28)$$

که در آن متغیرهای  $d_1$ ،  $d_2$  و  $d_3$  نماد میزان انحراف از مقادیر بهینه مربوط به میانگین بازده پرتفولیو، میانه انحراف مطلق و آنتروپی شانون هستند و به این شرط که معادله های (۱۶) و (۱۷) برقرار باشند.

مدل میانه انحراف مطلق-آنتروپی شانون در حالت فروش استقرایی قابل کاربرد نیست، چون مبتنی بر آنتروپی تعریف شده توسط (شانون، ۱۹۴۸) است که در آن الزاماً وزن دارایی های تشکیل دهنده پرتفولیو باید مثبت باشد و این بیانگر محدودیت مدل های مذکور است. در این پژوهش مدل میانه انحراف مطلق-آنتروپی شانون مبتنی بر لحاظ نمودن فرض

<sup>1</sup> Benchmark Portfolio

<sup>2</sup> Portfolio Optimization

<sup>3</sup> Goal Programming

<sup>4</sup> Tayi and Leonard

توزیع‌های آماری چوله - نرمال و چوله - لاپلاس - نرمال برای بازده‌ها معرفی می‌شود و در نهایت بهترین مدل بر اساس معیار نسبت عملکرد جهت تشکیل پرتفولیوی بهینه مشخص می‌شود.

مرحله سوم) مقایسه عملکرد مدل: عملکرد مدل مطرح شده با استفاده از نسبت میانگین بازده پرتفولیو به میانه انحراف مطلق پرتفولیو در رابطه زیر حاصل می‌شود. نسبت عملکرد بالاتر در نتیجه میانگین بازده بالاتر یا میانه انحراف مطلق کمتر حاصل می‌شود.

$$(29) \quad \text{نسبت عملکرد} = \frac{\text{میانگین بازده پرتفولیو}}{\text{میانه انحراف مطلق پرتفولیو}}$$

محاسبات مربوط به مدل میانه انحراف مطلق - آنتروپی شانون مبتنی بر توزیع‌های آماری چوله - نرمال و چوله - لاپلاس - نرمال با استفاده از نرم‌افزار R انجام می‌شود.

### ۳-۳- روش آزمون فرضیه

با استفاده از بسته نرم‌افزاری stats و دستور optim در نرم‌افزار R و سپس با جای‌گذاری مقادیر به دست آمده از روابط (۷) و (۱۳)، در مدل بهینه‌سازی چند هدفه میانه انحراف مطلق - آنتروپی شانون معرفی شده در این پژوهش و یافتن مقادیر بهینه توابع هدف و با استفاده از روش بهینه‌سازی برنامه‌ریزی آرمانی، نسبت‌های سرمایه‌گذاری سهام یا به عبارت دیگر وزن سهام منتخب تعیین خواهند شد به نحوی که منجر به حداکثر بازدهی و حداقل ریسک میانه انحراف مطلق شود. در نهایت مدل‌های معرفی شده در این پژوهش بر اساس معیار نسبت عملکرد<sup>۱</sup> مقایسه می‌شوند.

### ۴- یافته‌های پژوهش

آماره‌های توصیفی مربوط به بازده‌های ماهانه نمونه مورد بررسی شامل میانگین، انحراف معیار، چولگی و کشیدگی که با استفاده از نرم‌افزار R استخراج شده‌اند در جدول (۲) آورده شده است. مشاهده می‌شود که برخی از سهام مقادیر چولگی و کشیدگی متفاوتی در مقایسه با توزیع نرمال برخوردار هستند. به عنوان مثال میزان چولگی نماد «شپنا» حتی منفی است که بیانگر این است که توزیع بازدهی متناظر با این نماد چوله به چپ است و به عنوان مثالی دیگر میزان کشیدگی توزیع بازدهی نماد «بساما» خیلی زیادتر از کشیدگی توزیع نرمال است که هر دوی این موارد بیانگر این موضوع هستند که توزیع نرمال توزیع برآزشی مناسبی برای تبیین توزیعی بازده‌های ماهانه نیست و بهتر است از توزیع‌هایی که به نحوی دارای پارامترهایی جهت تبیین میزان چولگی و کشیدگی توزیع بازده‌ها هستند استفاده شود. توزیع‌های آماری پیشنهادی در این پژوهش، توزیع‌های آماری چوله - نرمال و چوله - لاپلاس - نرمال هستند، به این دلیل که هم خواصی مشابه با توزیع نرمال و در حالت کلی توزیع‌های مقارنی مانند توزیع لاپلاس دارند و هم از ویژگی مطلوب تک مدی بودن برخوردار هستند و هم پارامترهایی جهت کنترل میزان کشیدگی و چولگی توزیع بازده‌ها در برمی‌گیرند (جدول ۲).

جدول ۲. حداکثر و حداقل آماره‌های توصیفی متناظر با نمادهای بورسی

| نماد بورسی | آماره توصیفی <sup>۲</sup> | مقدار آماره توصیفی |
|------------|---------------------------|--------------------|
| وآذر       | حداکثر میانگین            | ۱۵/۱۳۵۳            |
| پارند      | حداقل میانگین             | ۰/۰۳۳۱             |
| خساپا      | حداکثر انحراف معیار       | ۳۵/۱۶۷۶            |
| پارند      | حداقل انحراف معیار        | ۲/۶۲۴۶             |
| بساما      | حداکثر چولگی              | ۳/۴۶۷۶             |
| شپنا       | حداقل چولگی               | -۰/۴۵۱۰            |
| بساما      | حداکثر کشیدگی             | ۱۸/۴۴۳۱            |
| کرآزی      | حداقل کشیدگی              | ۱/۸۷۹۴             |

<sup>۱</sup> Performance Ratio

<sup>۲</sup> Descriptive Statistics

با اجرای برنامه R برای مدل‌های پیشنهادی ارائه شده در این پژوهش، نتایج زیر به دست آمد:

همان‌طور که از جدول (۳) ملاحظه می‌شود مدل مبتنی بر توزیع چوله-لاپلاس-نرمال از عملکرد بهتری در مقایسه با مدل متناظر مبتنی بر توزیع چوله-نرمال برخوردار است. همان‌طور که مشاهده می‌شود میزان بازدهی پرتفولیوی حاصل از مدل مبتنی بر توزیع چوله-لاپلاس-نرمال (۷/۰۴۹۲) به مقدار (۰/۰۸۹۷) درصد بیشتر از میزان بازدهی پرتفولیوی حاصل از مدل مبتنی بر توزیع چوله-نرمال (۶/۹۵۹۵) است و در عین حال میزان ریسک میانه انحراف مطلق پرتفولیوی حاصل از مدل مبتنی بر توزیع چوله-لاپلاس-نرمال در این حالت (۱/۳۳۲۱) درصد به مقدار (۱۴/۸۵۹۴) درصد کمتر از میزان ریسک میانه انحراف مطلق پرتفولیوی حاصل از مدل مبتنی بر توزیع چوله-نرمال (۱۶/۱۹۱۵) درصد است که هر دو حالت مطلوب است و در نتیجه مدل مبتنی بر توزیع چوله-لاپلاس-نرمال از مدل مبتنی بر توزیع چوله-نرمال بر اساس معیار مقایسه نسبت عملکرد، از عملکرد بهتری برخوردار است (جدول ۳).

جدول ۳. نتایج میانگین بازده پرتفولیو و ریسک میانه انحراف مطلق پرتفولیوی مدل‌ها

| نتایج بهینه‌سازی (معیار ریسک میانه انحراف مطلق) |                  |                          |
|-------------------------------------------------|------------------|--------------------------|
| توزیع چوله-لاپلاس-نرمال                         | توزیع چوله-نرمال | بر حسب درصد              |
| ۷/۰۴۹۲                                          | ۶/۹۵۹۵           | میانگین بازده            |
| ۱/۳۳۲۱                                          | ۱۶/۱۹۱۵          | ریسک (میانه انحراف مطلق) |
| ۵/۲۹۱۷                                          | ۰/۴۲۹۸           | نسبت عملکرد              |

## ۵- نتیجه‌گیری و پیشنهادها

در این پژوهش به مطالعه و بررسی عملکرد مدل‌های میانه انحراف مطلق-آنتروپی شانون مبتنی بر توزیع چوله-نرمال و چوله-لاپلاس-نرمال به عنوان توزیع برازشی بازده‌های ماهانه به منظور تشکیل پرتفولیوی بهینه پرداخته شد. داده‌های به کار رفته در این پژوهش شامل بازده‌های ماهانه نمونه‌ای شامل ۱۸۱ نماد بورسی هستند. یافته‌های پژوهش حاکی از این است که مدل مبتنی بر توزیع چوله-لاپلاس-نرمال از مدل مبتنی بر توزیع چوله-نرمال از نسبت عملکرد بالاتری برخوردار بوده و منجر به گزینش پرتفولیوی بهینه‌تری می‌شود که این به دلیل لحاظ نمودن هر دو معیار چولگی و کشیدگی در مدل مبتنی بر توزیع چوله-لاپلاس-نرمال است. به عبارت دیگر از آن‌جا که بر اساس آماره‌های توصیفی، میزان کشیدگی توزیع بازده اغلب نمادهای بورسی قابل ملاحظه است، لذا به کارگیری مدلی مبتنی بر توزیع چوله-لاپلاس-نرمال توانسته است عملکرد بهتری نسبت به مدل مبتنی بر توزیع چوله-نرمال داشته باشد. یافته مذکور با نتیجه مطالعه **آکسارایی و پالا (۲۰۱۸)** که با در نظر گرفتن ترکیبی از گشتاورهای مراتب بالاتر (چولگی و کشیدگی) و آنتروپی صورت گرفته مطابقت دارد. همچنین یافته این پژوهش به دلیل لحاظ نمودن معیار آنتروپی شانون به عنوان معیار تنوع بخشی با نتایج مطالعاتی که توسط **راعی و همکاران (۱۳۹۶)** و **برا و پارک (۲۰۰۸)** و **لیم و همکاران (۲۰۲۱)** انجام شده است، مطابقت می‌کند.

از آن‌جا که با بررسی انجام شده مشخص شد که توزیع بازده ماهانه سهام در بورس اوراق بهادار تهران دارای توزیع چوله-لاپلاس-نرمال است، بنابراین به سرمایه‌گذاران، مشاوران و تحلیل‌گران مالی پیشنهاد می‌شود جهت انتخاب پرتفولیوی بهینه در مدل مبتنی بر میانه انحراف مطلق-آنتروپی شانون از مدل مبتنی بر توزیع چوله-لاپلاس-نرمال استفاده نمایند.

همچنین به محققان آتی توصیه می‌شود که به بررسی مدل‌های پیشنهادی این پژوهش با سایر معیارهای آنتروپی از جمله آنتروپی جینی-سیمپسون و آنتروپی رنی و ... نیز مقایسه نتایج حاصل از به کارگیری آنها با معیار آنتروپی شانون بپردازند. همچنین پیشنهاد می‌شود که مدل‌های پیشنهادی این پژوهش با سایر روش‌های بهینه‌سازی از جمله روش

بهینه‌سازی اسکالرسازی و الگوریتم‌های فراابتکاری و ... مورد بررسی قرار گیرد. اصلی‌ترین محدودیت در این پژوهش این است که مدل‌های مورد استفاده در پژوهش با فرض عدم امکان فروش استقراضی است که این باعث می‌شود تا به کارگیری مدل در عمل با چالش مواجه شود.

## ملاحظات اخلاقی

### پیروی از اصول اخلاق پژوهش

نویسندگان اصول اخلاقی را در انجام و انتشار این پژوهش علمی رعایت و این موضوع مورد تأیید همه آنهاست.

### مشارکت نویسندگان

**جمع‌آوری داده‌ها:** هیلا رضائی؛ **تهیه گزارش پژوهش:** هیلا رضائی؛ **دکتر غلامحسین گل‌ارضی و دکتر امید کریمی؛ تحلیل داده‌ها:** هیلا رضائی؛ **دکتر غلامحسین گل‌ارضی و دکتر امید کریمی.**

این مقاله برگرفته از پایان‌نامه **هیلا رضائی در رشته مدیریت صنعتی به راهنمایی دکتر غلامحسین گل‌ارضی در دانشگاه سمنان** است.

**نویسنده اول:** تهیه و آماده‌سازی نمونه‌ها، انجام آزمایش و گردآوری داده‌ها، انجام محاسبات، تجزیه و تحلیل آماری داده‌ها، تحلیل و تفسیر اطلاعات و نتایج، تهیه پیشنویس مقاله.

**نویسنده دوم:** استاد راهنمای پایان‌نامه، طراحی پژوهش، نظارت بر مراحل انجام پژوهش، بررسی و کنترل نتایج، اصلاح، بازبینی و نهایی‌سازی مقاله.

**نویسنده سوم:** استاد مشاور پایان‌نامه، مشارکت در طراحی پژوهش، نظارت بر پژوهش، مطالعه و بازبینی مقاله.

### تعارض منافع

بنا بر اظهار نویسندگان این مقاله تعارض منافع ندارد.

### حامی مالی

نویسندگان هیچگونه حمایت مالی برای تحقیق، تألیف و انتشار این مقاله دریافت نکرده‌اند.

### تقدیر و تشکر

بدینوسیله از معاونت محترم پژوهشی دانشگاه سمنان به خاطر حمایت معنوی در اجرای پژوهش حاضر سپاسگزاری می‌شود.

### منابع

- آذر، عادل؛ یزدانین، احمدرضا و قندهاری، مریم (۱۳۹۵). بهینه‌سازی سبد سهام با استفاده از الگوریتم ژنتیک و روش K-means بهبود یافته بر پایه الگوریتم ژنتیک. همایش ریاضیات و علوم انسانی. [SID].
- اسکندری سبزی، سیما و حاجی آقاچانی، اعظم (۱۴۰۲). تأثیر همه‌گیری کووید-۱۹ بر بازار سهام: مطالعه موردی کشورهای منتخب عضو اوپک، مجله توسعه و سرمایه، ۸(۲)، ۱۵۱-۱۶۸. [https://jdc.uk.ac.ir/article\\_3431.html](https://jdc.uk.ac.ir/article_3431.html)
- بهزادی، عادل و بختیاری، مصطفی (۱۳۹۳). ارائه مدلی بر مبنای میانگین-آنتروپی-چولگی برای بهینه‌سازی سبد سهام در محیط فازی. فصلنامه مهندسی مالی و مدیریت اوراق بهادار، ۱۵(۱)، ۵۵-۳۹. [https://fej.ctb.iau.ir/article\\_511497.html](https://fej.ctb.iau.ir/article_511497.html)
- تقی‌زاده یزدی، محمدرضا؛ فلاح‌پور، سعید و احمدی مقدم، محمد (۱۳۹۵). انتخاب پرتفوی بهینه با استفاده از برنامه‌ریزی فرا آرمانی و برنامه‌ریزی آرمانی ترتیبی توسعه یافته. تحقیقات مالی، ۱۸(۴)، ۵۹۱-۶۱۲. [https://jfr.ut.ac.ir/article\\_62580.html](https://jfr.ut.ac.ir/article_62580.html)
- تهرانی، رضا؛ فلاح‌تقی، سیما و آصفی، سپهر (۱۳۹۷). بهینه‌سازی سبد سهام به کمک الگوریتم فراابتکاری دسته‌های میگو با استفاده از معیارهای مختلف از ریسک در بورس اوراق بهادار تهران. تحقیقات مالی، ۲۰(۴)، ۴۰۹-۴۲۶. [https://jfr.ut.ac.ir/article\\_70018.html](https://jfr.ut.ac.ir/article_70018.html)

- خندان، عباس (۱۴۰۲). مقایسه عملکرد میانگین با میان و دیگر شاخص های ریسک در بهینه سازی سبد سهام، فصلنامه علمی پژوهشی اقتصاد مقداری، ۲۰(۱)، ۹۹-۱۳۸.  
<https://doi.org/10.22055/jqe.2021.36778.2349>
- دیده خانی، حسین؛ عباسی، ابراهیم؛ شیری قهی، امیر و مشاری، محمد (۱۳۹۸). توسعه مدل بهینه سازی پرتفوی میانگین - انحراف مطلق (MAD) با رویکرد عدم قطعیت ترکیبی تصادفی-فازی و در نظر گرفتن نگرش سرمایه گذاران به ریسک، فصلنامه مهندسی مالی و مدیریت اوراق بهادار، ۱۰(۴۰)، ۸۴-۱۰۲.  
<https://fej.ctb.iau.ir>
- رستمی، محمدرضا؛ کلانتری بنجار، محمود و بهزادی، عادل (۱۳۹۴). گشتاورهای مراتب بالاتر در بهینه سازی سبد سهام در محیط فازی، مجله مهندسی مالی و مدیریت اوراق بهادار، ۶(۲۴)، ۴۱-۶۲.  
[https://fej.ctb.iau.ir/article\\_514756.html](https://fej.ctb.iau.ir/article_514756.html)
- راعی، رضا؛ باجلان، سعید؛ حبیبی، مصطفی و نیک عهد، علی (۱۳۹۶). بهینه سازی پرتفوی چند هدفه بر اساس میانگین، واریانس، آنتروپی و الگوریتم ازدحام ذرات، فصلنامه مدل سازی ریسک و مهندسی مالی، ۲(۳)، ۳۶۲-۳۷۹.  
[https://jferm.khatam.ac.ir/article\\_66584.html?lang=fa](https://jferm.khatam.ac.ir/article_66584.html?lang=fa)
- راعی، رضا و پویانفر، احمد (۱۳۹۶). مدیریت سرمایه گذاری پیشرفته، تهران، انتشارات سمت.  
<https://samt.ac.ir/fa/book/1582>
- محبی، نگین و نجفی، امیرعباس (۱۳۹۷). بهینه سازی سبد سرمایه گذاری چند دوره ای با رویکرد برنامه ریزی پویا، فصلنامه مطالعات مدیریت صنعتی، ۱۶(۵۰)، ۱-۲۶.  
<https://doi.org/10.22054/jims.2018.9104>
- محمدی باغملاتی، حسین؛ پارسا، حجت؛ طهماسبی، سعید؛ حاجیانی، پرویز (۱۴۰۰). کاربرد معیار آنتروپی تجمعی و الگوریتم PSO در بهینه سازی سبد سهام شرکت های پتروشیمی بازار بورس اوراق بهادار. مجله توسعه و سرمایه، ۶(۲)، ۴۱-۵۵.  
[https://jdc.uk.ac.ir/article\\_3124.html?lang=fa](https://jdc.uk.ac.ir/article_3124.html?lang=fa)
- نبی زاده، احمد و بهزادی، عادل (۱۳۹۷). گشتاور مراتب بالاتر در بهینه سازی پرتفوی با در نظر گرفتن آنتروپی و استفاده از برنامه ریزی آرمانی چندجمله ای، فصلنامه تحقیقات مالی، ۲۰(۲)، ۱۹۳-۲۱۰.  
<https://doi.org/10.22059/frj.2018.255731.1006645>

## References

- Aksarayli, M., & Pala, O. (2018). A polynomial goal programming model for portfolio optimization based on entropy and higher moments. *Expert Systems with Applications*, 94, 185-192. <https://doi.org/10.1016/j.eswa.2017.10.056>.
- Azar, A., Yazdani, A. & Ghandehari M. (2019). Stock portfolio optimization using genetic algorithm and adaptive k-means method based on genetic algorithm. *Presented in the 4th Seminar of Mathematics and Humanities*, Tehran, Iran. [SID] [In Persian].
- Azzalini, A. (1985). A Class of Distribution which includes the normal ones. *Scandinavian Journal of Statistics*, 12(2), 171-178. <https://www.jstor.org/stable/4615982>.
- Behzadi, A., & Bakhtiari, M. (2013). Presenting a model based on mean-entropy-skewness for optimization. *Financial Engineering and Portfolio Management*, 5(19), 39-55. <https://fej.ctb.iau.ir> [In Persian].
- Bera, A.K., & Park, S.Y. (2008). Optimal Portfolio Diversification Using the Maximum Entropy Principle. *Econometric Reviews*, 27(4-6), 484-512. <https://doi.org/10.1080/07474930801960394>.
- Cont, R. (2001). Empirical properties of asset returns: Stylized facts and statistical issues. *Quantitative Finance* 1(2), 223-236. <https://doi.org/10.1080/713665670>.
- Dai, W. (2018). Mean-entropy models for uncertainty portfolio selection. In: *Multi-Objective Optimization*; Springer: Singapore. DOI: [10.1007/978-981-13-1471-1\\_2](https://doi.org/10.1007/978-981-13-1471-1_2).
- DeMiguel, V., Garlappi L., & Uppal R. (2009). Optimal versus naive diversification: How inefficient is the 1/N portfolio strategy? *Review of Financial Studies*, 22(5), 1915-1953. DOI: [10.1093/rfs/hhm075](https://doi.org/10.1093/rfs/hhm075).
- Didekhani, H., Abbasi, E., Shiri Qahi, A., & Mishari, M. (2018). Development of fuzzy random optimization model mean-developing a fuzzy random portfolio optimization model considering investor's risk attitude. *Financial Engineering and Portfolio Management*, 10(40), 84-102. <https://fej.ctb.iau.ir> [In Persian].
- Erdas, M.L. (2020). Developing a portfolio optimization model based on linear programming under certain constraints: An application on Borsa Istanbul 30 Index. *TESAM Akademi Dergisi-Turkish Journal of TESAM Academy*, 7(1), 115-141. <https://doi.org/10.30626/tesamakademi.696299>.
- Eskandari Sabzi, S., & Hajiaghajani, A. (2023). The impact of Covid-19 epidemic on stock market; case study of selected OPEC member countries. *Journal of Development and Capital*, 8(2), 151-168. <https://jdc.uk.ac.ir> [In Persian].
- Gupta, A.K., Chang, F.C., & Huang, W.J. (2003). Some skew-symmetric models. *Random Operators Stochastic Equations*, 10, 133-140. <https://doi.org/10.1515/rose.2002.10.2.133>.
- Huang, X. (2008). Mean-Entropy Models for Fuzzy Portfolio Selection. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 16(4), 1096-1101. <https://doi.org/10.1109/TFUZZ.2008.924200>.
- Jagannathan, R., & Ma, T. (2003). Risk reduction in large portfolios: Why imposing the wrong constraints helps. *Journal of Finance*, 58(4), 1651-1684. <https://ssrn.com/abstract=310469>.
- Jana, P., Roy, T.K., & Mazumder, S.K. (2009). Multi-objective possibilistic model for portfolio selection with transaction cost. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 228(1), 188-196. <https://doi.org/10.1016>.
- Kamali, S. (2014). Portfolio optimization using particle swarm optimization and genetic algorithm. *Journal of Mathematics and Computer Science*, 10(2), 85-90. <http://dx.doi.org/10.22436/jmcs.010.02.01>.

- Kasembacher, G., Lee, J., & Euchukanonchai, K. (2017). Mean-variance vs. mean-absolute deviation: A performance comparison of portfolio optimization models. University of British Columbia, Vancouver BC, Canada, *Thesis*, 1(22), 1-11. DOI: [10.13140/RG.2.2.14459.36644](https://doi.org/10.13140/RG.2.2.14459.36644).
- Khandan, A. (2023). Comparing the performance of median or mean and other risk indicators in portfolio optimization. *Quarterly Journal of Quantitative Economics*, 20(1), 99-138. DOI: [10.22055/jqe.2021.36778.2349](https://doi.org/10.22055/jqe.2021.36778.2349) [In Persian].
- Konno, H., & Yamazaki, H. (1991). Mean-absolute deviation portfolio optimization model and its application to Tokyo stock market. *Management Science*, 37, 519-531. <https://doi.org/10.1287/mnsc.37.5.519>.
- Lam, W.S., Lam, W.H., & Jaaman, S.H. (2021). Portfolio optimization with a mean-absolute deviation-entropy multi-objective model. *Entropy*, 23(10), 1266. <https://doi.org/10.3390/e23101266>.
- Li, B., & Zhang, R. (2021). A new mean-variance-entropy model for uncertain portfolio optimization with liquidity and diversification. *Chaos Solitons Fractals*, 146, 1-6. <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2021.110842>.
- Lu, S., Zhang, N., & Jia, L. (2021). A multiobjective multiperiod mean-semientropy-skewness model for uncertain portfolio selection. *Applied Intelligence*, 51, 5233-5258. <https://doi.org/10.1007/s10489-020-02079-3>.
- Markowitz, H. (1952). Portfolio selection. *The Journal of Finance*, 7, 77-91. <https://doi.org/10.1111>.
- Mercurio, P.J.; Wu, Y., & Xie, H. (2020). An entropy-based approach to portfolio optimization. *Entropy*, 22(3), 332. <https://doi.org/10.3390/e22030332>.
- Mohammadi Baghmolaei, H., Parsa, H., Tahmasebi, S., & Hajiani, P. (2021). application of cumulative entropy measure and PSO algorithm in Tehran Stock Exchange petrochemical companies portfolio optimization. *Journal of Development and Capital*, 6(2), 41-55. DOI: [10.22103/jdc.2022.17949.1142](https://doi.org/10.22103/jdc.2022.17949.1142) [In Persian].
- Mohebbi, N., & Najafi, A. A. (2018). Multi-period portfolio optimization using dynamic programming approach. *Industrial Management Studies Quarterly*, 16(50), 1-26. <https://doi.org/10.22054/jims.2018.9104> [In Persian].
- Nabizade, A., & Behzadi, A. (2017). Higher moments portfolio optimization with entropy based polynomial goal programming. *Financial Research Journal*, 20(2), 193-210. <https://doi.org/10.22059> [In Persian].
- Philippatos G., & Wilson C. (1972). Entropy, market risk, and the selection of efficient portfolios. *Applied Economics*, 4(3), 209-220. <https://doi.org/10.1080/00036847200000017>.
- Raei, R., Bajalan, S., Habibi, M., & Nikahd, A. (2016). Optimization of multi-objective portfolios based on mean, variance, entropy and particle swarm algorithm. *Journal of Risk Modeling and Financial Engineering*, 2(3), 362-379. [https://jferm.khatam.ac.ir/article\\_66584.html?lang=en](https://jferm.khatam.ac.ir/article_66584.html?lang=en) [In Persian].
- Raei, R., & Pouyanfar, A. (2016). Advanced investment management, Tehran, Samt publications, <https://samt.ac.ir> [In Persian].
- Rasiah, D. (2012). Post-modern portfolio theory supports diversification in an investment portfolio to measure investment's performance. *Journal of Finance and Investment Analysis*, 1(1), 1-3. <https://ideas.repec.org>.
- Rom, B.M. & Ferguson, K.W. (1993). Post-modern portfolio theory comes of age. *The Journal of Investing*, 2(4), 27-33. [https://www.actuaries.org/AFIR/colloquia/Orlando/Ferguson\\_Rom.pdf](https://www.actuaries.org/AFIR/colloquia/Orlando/Ferguson_Rom.pdf).
- Rostami, M., Benjar, M., & Behzadi, A. (2014). Higher order moments in stock portfolio optimization in fuzzy environment. *Financial Engineering and Portfolio Management*, 6(24), 41-62. <https://fej.ctb.iau.ir> [In Persian].
- Rotela Junior, P., Rocha, L.C.S., Aquila, G., Balestrassi, P.P., Peruchi, R.S., & Lacerda, L.S. (2017). Entropic data envelopment analysis: A diversification approach for portfolio optimization. *Entropy*, 19(9), 352. <https://doi.org>.
- Samuelson, P.A. (1970). The fundamental approximation theorem of portfolio analysis in terms of means, variances and higher moments. *The Review of Economic Studies*, 37(4), 537-542. <http://hdl.handle.net>.
- Shannon, C.E. (1948). A mathematical theory of communication. *The Bell System Technical Journal*, 27, 379-423. <https://doi.org/10.1002/j.1538-7305.1948.tb01338.x>.
- Taghizadeh Yazdi, M., Fallahpour, S. & Ahmadi Moghaddam, M. (2017). Portfolio selection by means of Meta-goal programming and extended lexicograph goal programming approaches. *Financial Research Journal*, 18(4), 591-612. <https://doi.org/10.22059/JFR.2017.62580> [In Persian].
- Tayi, G.K., & Leonard, P.A. (1988). Bank balance-sheet management: An alternative multiobjective model. *Journal of the Operational Research Society*, 39(4), 401-410. <https://doi.org/10.1057/jors.1988.68>.
- Tehrani, R., Fallah, S.T., & Asefi, S. (2018). Portfolio optimization using krill herd metaheuristic algorithm considering different measures of risk in Tehran Stock Exchange. *Financial Research Journal*, 20(4), 409-426. <https://doi.org/10.22059/FRJ.2019.244004.1006538> [In Persian].
- Zhang, W.G., Liu, Y.J., & Xu, W.J. (2012). A possibilistic mean-semi variance-entropy model for multi-period portfolio selection with transaction costs. *European Journal of Operational Research*, 222(2), 341-349. DOI: [10.1016/j.ejor.2012.04.023](https://doi.org/10.1016/j.ejor.2012.04.023).
- Zhou, R. (2017). Properties of risk measures of generalized entropy in portfolio selection. *Entropy*, 19, 657. DOI: [10.3390/e19120657](https://doi.org/10.3390/e19120657).